SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM

ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK

1. MECHANIKA-VÉGESELEM MÓDSZER ELŐADÁS

(kidolgozta: Szüle Veronika, egy. ts.)

Bevezető:

A számítógépes mérnöki tervező rendszerek szinte mindegyike tartalmaz végeselem módszeren alapuló analízis modulokat, amelyek szilárdságtani, dinamikai, áramlástani, hőtani, elektromágneses, stb. feladatok mérnöki szempontok szerinti megoldását teszik lehetővé. Ezen programrendszerek hatékony felhasználásához szükség van azonban a módszer elvi alapjainak, numerikus technikáinak ismeretére. Ezen ismeretek hiánya modellezési tévedésekhez vezet, valamint gátolja az analízis eredmények megértését.

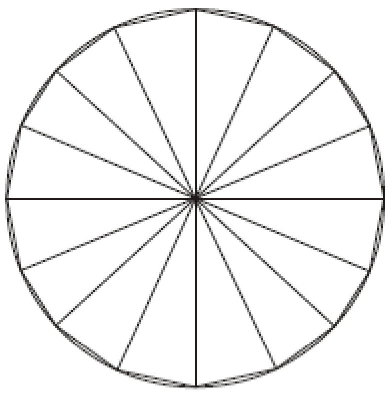
1. Végeselem módszer kialakulásának története, a módszer fejlődése, elterjedése, szerepe a mérnöki tervezői munkában

1.1. A módszer kialakulásának története

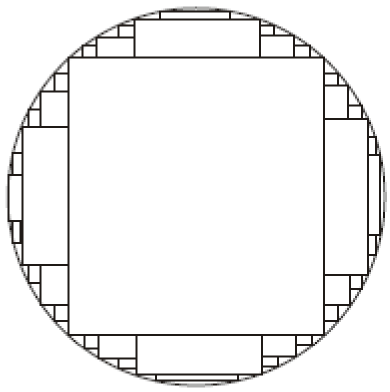
Véges elemek: alkalmazásával bonyolult (és bizonyos körülmények között nem megoldható) feladatok egyszerűsítése a cél. Az egyszerűsítés alapja, hogy a test geometriáját véges számú, kisebb és egyszerűbb elemre bontjuk. Így a kevesebb és bonyolultabb számítás helyett egyszerűbb számítást kell végeznünk.

A diszkretizáció alkalmazása geometriai problémák megoldására:

- kör kerületének, területének meghatározása (1.1. ábra),
- henger, gömb térfogatának meghatározása.



a)

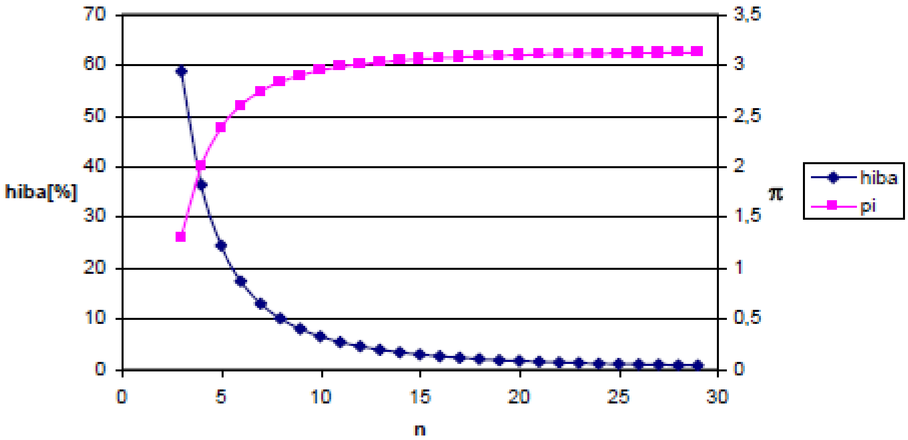


b)

1.1.ábra: Kör területének közelítése

A kör területének számításakor a körlapot n darab egyenlő szárú háromszögre bontjuk az 1.1. a) ábra szerint. Ekkor a π közelítő értékének és hibájának alakulása látható az 1.2. ábrán a felosztás függvényében, ahol

$$\pi = n\cos\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)\sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \text{, és a } hiba = \frac{\pi - n\cos\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)\sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)}{\pi}\cdot 100\%$$



1.2.ábra: π számított értéke és hibája a felosztás növelésével

Tszu Csang Csik kínai mérnök (i. sz. 480-ban) feltételezhetően téglalapok segítségével állapította meg, hogy π értéke $3{,}1415926$ és $3{,}1415927$ között van.

1.2. A variációszámítás kialakulása alapfogalmai

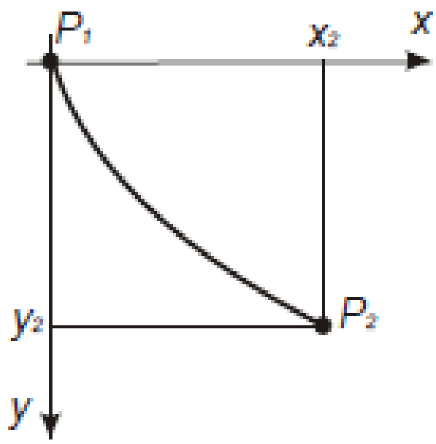
1.2.1. Brachisztochron-probléma

Másnéven **legrövidebb idő probléma**.

(Az egzakt (pontos) megoldás és a közelítő megoldás közötti lehető legkisebb eltérést keressük.)

A probléma: Tekintsünk két nem azonos magasságban és nem egy függőleges egyenesen elhelyezkedő pontokat, valamint azokat a két pont által kijelölt függőleges síkban levő görbéket, amelyeken egy anyagi pont a magasabb pontból kezdősebesség és súrlódás nélkül indítva eljut az alacsonyabban fekvő pontba.

A kérdés az, hogy létezik-e ezen görbék között olyan amit a pont minimális idő alatt fut be és ha igen, hogyan lehet meghatározni?



1.3.ábra: Brachisztochron-probléma

A keresett y függvény grafikonja átmegy a P_1 és P_2 pontokon, tehát:

$$y(0)=0 \text{ és } y(x_2)=y_2 \ . \tag{1.1}$$

Energiamegmaradás tétele a kitűzött feladatra:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \tag{1.2}$$

A sebesség:

$$v = \frac{ds}{dt} \ . \tag{1.3}$$

Az elemi úthossz: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ (1.4)

(1.2) egyenletben a tömeggel egyszerűsítve és behelyettesítve (1.3)-t és (1.4)-t:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = gy \tag{1.5}$$

rendezve:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dx}\right)^2 = 2gy \tag{1.6}$$

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2gy \tag{1.7}$$

A változók szétválasztásával az út megtételéhez szükséges idő:

$$T = \int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g \cdot y}}\, dx \tag{1.8}$$

Így tehát keressük azt a függvényt, amely eleget tesz (1.1)-nek és amelyre (1.8)-nak minimuma van. A megoldás egy ciklois:

$$y(t) = c_1 \arcsin \frac{x}{c_1} - \sqrt{2c_1 x - x^2} + c_2 \ , \qquad (1.9)$$

ahol c_1, c_2 állandók az (1.1) feltételekből határozhatók meg.

A nevezett probléma, amikor egy skalár függvény minimalizálásához függvényt kell keresni indította el a variációszámítás alapgondolatát és annak fejlődését.

1.2.2. Funkcionálok, variáció

A brachisztochron problémához hasonló probléma a természettudományokban gyakran előfordul.

Bizonyos mutatók, mennyiségek értékét függvények határozzák meg. A legegyszerűbb eset egy határozott integrál értéke, amely a kiválasztott függvénytől függ, de ilyen egy ívhossz, felület, térfogat vagy tartó potenciális energiája is. Az ilyen mennyiségeket funkcionálnak nevezzük.

Definíció: valamely halmaznak egy a való számok halmazába történő leképezését (valós) funkcionálnak vagy operátornak nevezzük.

Az általános matematikai definíció speciális esete, amikor a függvények halmazának a valós számok halmazába való leképezését nevezzük funkcionálnak.

Legyen $f \in R^3 \to R$ adott függvény, és $y \in R \to R$ megengedett függvény, amely értelmezési tartományán folytonosan deriválható $y \in C_1[x_1, x_2]$ és átmegy a tartomány szélein rögzített $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ pontokon:

$$y(x_1) = y_1, \ (x_2) = y_2 \ . \qquad (1.10)$$

Ekkor minden y függvényhez rendeljük hozzá az

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y(x), y'(x) dx\right) \qquad (1.11)$$

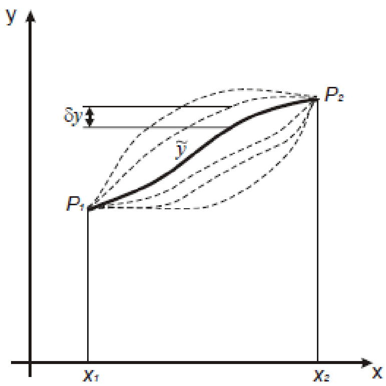
valós számot. Így értelmezzük az I funkcionált.

A feladat legtöbbször a funkcionál szélsőértékének meghatározása. A szélsőérték lehet abszolút vagy lokális.

- Ha $I[y]$ funkcionál teljes értelmezési tartományán fennáll, hogy $\tilde{y} \in y$ függvényre, hogy $I[y] \geq I[\tilde{y}]$, akkor $I[\tilde{y}]$ **abszolút minimum.**
- Ha $I[y]$ funkcionál értelmezési tartományának egy részén fennáll, hogy $I[y] \geq I[\tilde{y}]$, akkor $I[\tilde{y}]$ **lokális minimum.**

A variációszámítás klasszikus értelmezése analógiá mutat a differenciálszámítással. Lagrange a differenciálszámítás mintájára bevezette a variációt (jele δ) és definiálta a műveleti szabályokat.

A klasszikus értelmezés szerint: $\tilde{y}$ függvény variációja δy, amelyről tudjuk, hogy $\delta y(x_1) = 0$ és $\delta y(x_2) = 0$. δy a tartomány x_1 és x_2 végpontjaiban ismert függvényértékeknél eltűnik, közte tetszőleges. Ekkor $y = \overline{y} + \delta y$ egy függvénysereget (megengedett függvényt) ad, amely tartalmazza a megoldást. A funkcionál variációját úgy értelmezzük, hogy



1.4. ábra: Variáció Lagrange-féle klasszikus értelmezése

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta f \; dx \; . \tag{1.12}$$

A feladat $\tilde{y}$ megoldását akkor kapjuk, ha a funkcionálnak minimuma van. Variációs megfogalmazásban

$$\delta I = 0. \tag{1.13}$$

Ez a szélsőérték létezésének szükséges feltétele.

Az abszolút és lokális minimum analógiájára egy funkcionál (pl. potenciális energia) minimumon alapuló módszer esetében definiálhatjuk egy probléma egzakt és közelítő megoldását.

Egzakt megoldás: ha az összes lehetséges függvény közül választjuk ki azt, amelyre a funkcionál minimális.

Ennek előállítása csak nagyon egyszerű esettekben lehetséges. A legtöbb esetben az egzakt megoldást nem tudjuk megtalálni, mivel analitikusan nem tudjuk megoldani az egyenleteket, a végtelen számú függvény közöl mindet megvizsgálni szintén nem lehetséges. A problémát akkor is meg kell oldani, ha nem tudjuk a pontos megoldást előállítani, ekkor közelítő megoldást keresünk.

Közelítő megoldás: ha nem az összes lehetséges függvény közül választjuk ki azt, amelyikre a funkcionál minimális.

A közelítő megoldások megkeresésére jöttek létre a direkt módszerek. Az Euler-féle törött vonalak Euler-variációs módszerének elemei voltak. A módszer a matematika modern eszközeinek birtokában újra előtérbe került, és a variációszámítás direkt módszerének alapja.

1.2.3. Direkt módszer

A funkcionál szélső értékét adó extremális függvények meghatározása volt a variációszámítás első problémáinak egyike.

Euler módszerének lényege, hogy vezessük vissza a problémát véges sok változótól függő függvények szélsőértékeinek vizsgálatára. Azaz megengedett függvényeknek véges sok (n számú) adattal leírható függvényeket veszünk és a funkcionálként definiált integrált (1.11) egy közelítő összeggel helyettesítjük. Ha n tart a végtelenhez, a közelítő összeg tart az integrál értékéhez.

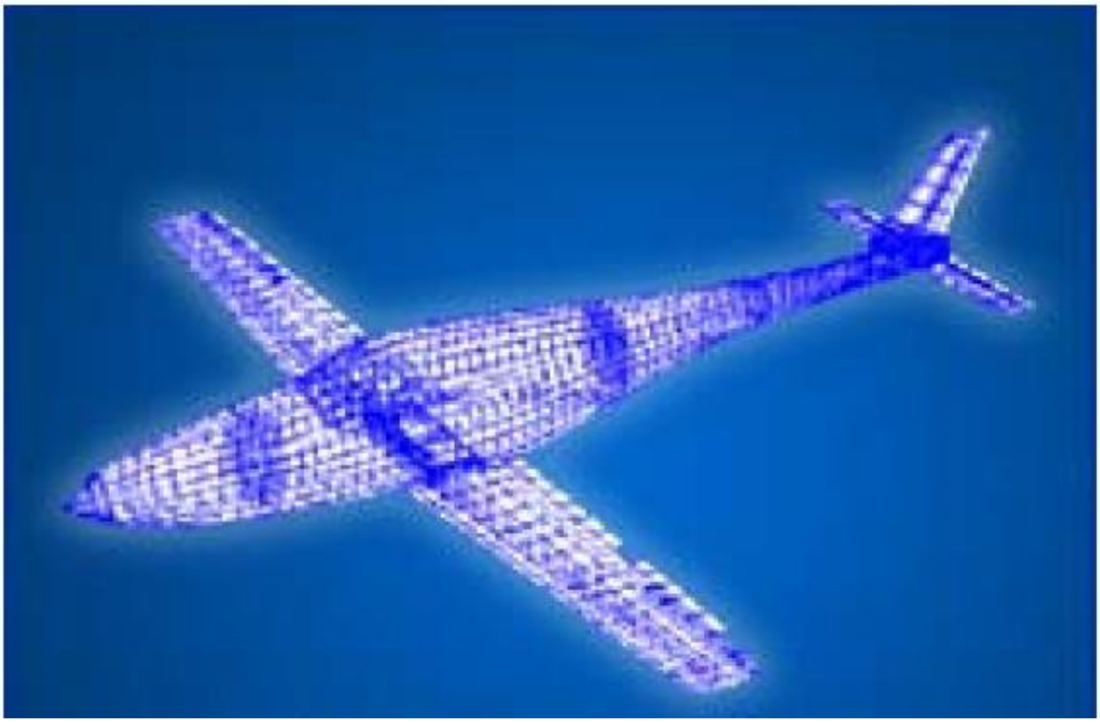
1.3. Ritz-módszer

A Ritz-módszerben a variációszámítás direkt módszerét alkalmazzuk közelítő megoldás keresésére, a végeselem-módszertől eltérően itt még teljes a tartományt egy függvénnyel írjuk le.

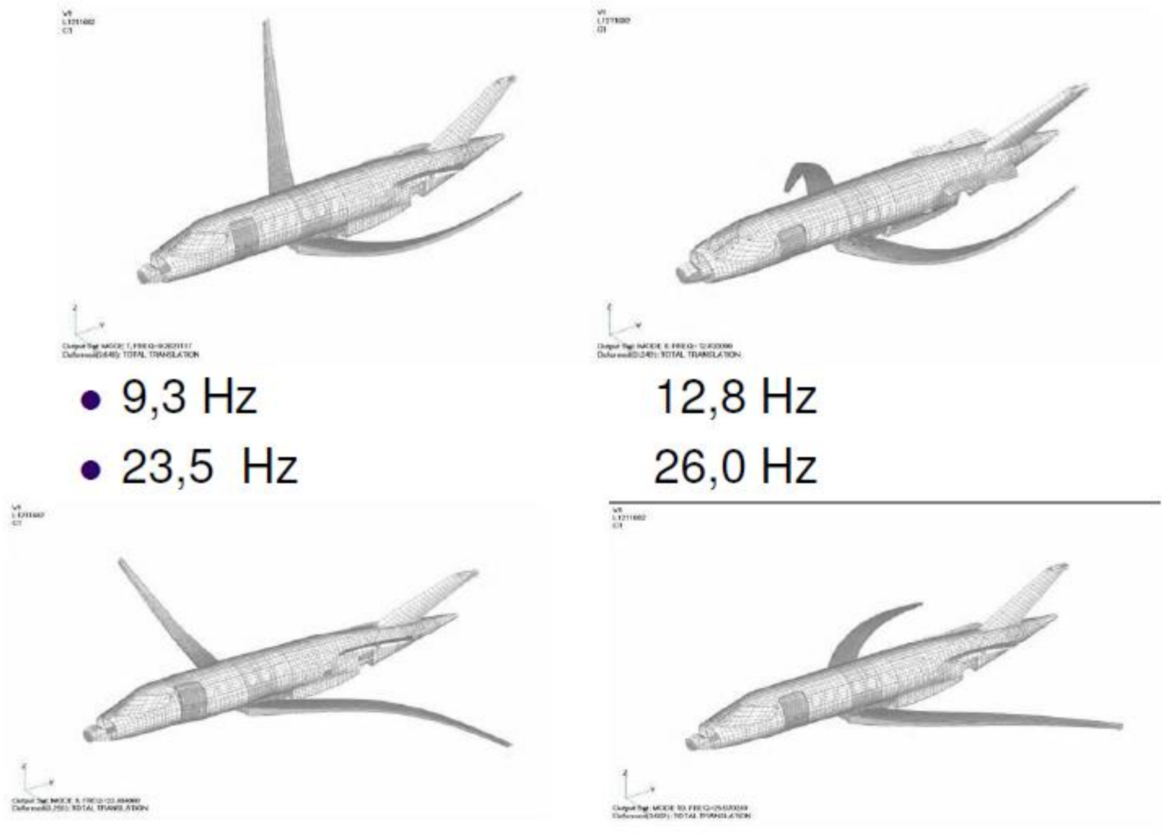
1.4. Modern végeselem módszer kialakulása

1.4.1. Erőmódszer

Az 1940-s években jelentek meg a sugárhajtású repülőgépek. A nagy sebesség miatt bonyolultabb geometriájú szerkezetek kialakítására volt szükség, csapott és delta szárnyakra. Ezek számítására a korábbi módszerek nem felelnek meg, ugyanis a repülésnél nem lehet a számítási bizonytalanságokat nagyobb biztonsági tényezőkkel kompenzálni, mert a felhasznált anyagok is drágábbak, valamint az üzemeltetési költségek is magasabbak. Ez volt az oka annak, hogy felmerült az igény bonyolult geometriákat is megfelelő pontossággal kezelő számítási módszerre.



Levy nevéhez fűződik az erőmódszer alkalmazása, ami a klasszikus rugalmasságtan alapjain az erők egyensúlyából indul ki, és ebből számít ki elmozdulásokat. 1947-ben csapott szárnyú repülőgépekre publikálta megoldását. Delta szárny esetében problémák merültek fel az erőmódszer alkalmazásával, más megoldásra volt szükség annak megoldásához.



1.4.2. Mozgásmódszer/Elmozdulásmódszer

Az erőmódszerrel párhuzamosan kutatások folytak az elmozdulásokon alapuló módszer kifejlesztésére és alkalmazására is. A Boeing cég egy Turner által vezetett kutatócsoportja 1956-ban publikált egy új módszerrel megoldott problémát. Ennek lényege egy feltételezett elmozdulásokkal felírt merevségmátrixon alapuló módszer gyakorlati alkalmazása volt, ami modern végeselem módszer lényegét már tartalmazta.

Ezt követően megszülettek a két és háromdimenziós alkalmazások, nagy lehajlási és egyéb geometriai és anyagi nemlineáris megoldások.

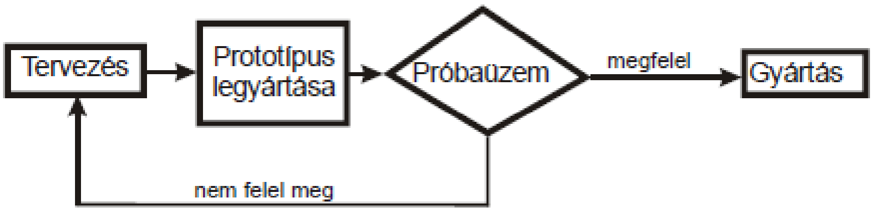
A konvergencia vizsgálata és a mátrixegyenletek és rugalmasságtani elvek analógiájának felismerése után a 60-s években a rugalmasságtan variációs elveinek alapjaira helyezték a végeselem-módszert.

Ekkor terjedt el széles körben a virtuális elmozdulások elvén alapuló módszer, és szinte egyeduralkodóvá vált. Az alkalmazott matematikai problémák és kidolgozásuk, a számítástechnika fejlődése folyamatosan tart.

A végeselem-módszert ma már szerkezeti, hő-, és áramlástani, elektromos, mágneses lineáris és nem lineáris feladatokra és ezek kombinációira, kapcsolt feladatokra is alkalmazzák. A számítógépek teljesítménye és a piacon megtalálható szoftverek kezelhetősége eljutott arra a szintre, hogy a mérnökök kezébe egy könnyen tanulható és felhasználóbarát eszközt adnak. Azonban az elméleti ismeretek hiányában a peremfeltételek, modellek nem megfelelő kiválasztásával a kapott megoldás sok esetben nem a valóságos feladat megoldása.

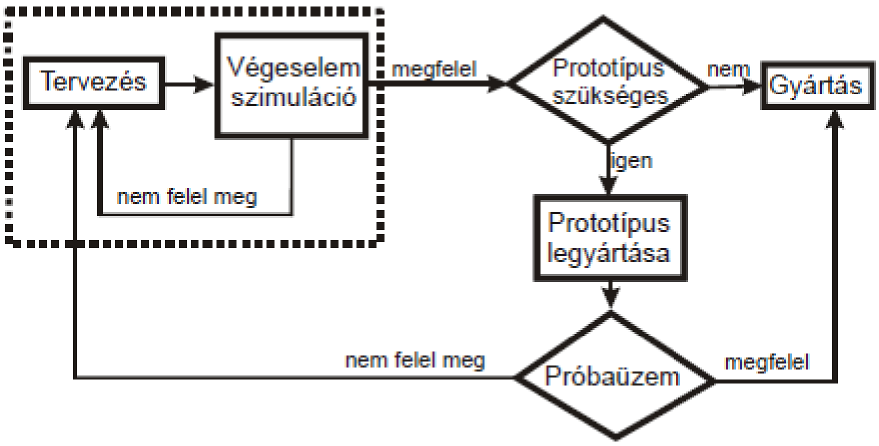
1.5. Végeselem módszer a műszaki gyakorlatban

A végeselem módszer elterjedése a műszaki gyakorlatban megváltoztatta a klasszikus gyártási folyamatot (1.6. ábra), beépült a gyártási láncba.



1.6. ábra: Klasszikus gyártási modell egyszerűsített folyamatábrája

A gyártási költség nagy része a kísérleti darabok legyártása és próbaüzemének végrehajtása. Mivel ezekhez szükség van anyagra, annak megmunkálására, a próbaüzemhez szükséges peremfeltételek biztosítására, kísérleti eszközökre. Valamint szükség van mind a prototípus-gyártás, mind a próbaüzem elvégzéséhez megfelelő szakszemélyzetre. Ezen költségek csak akkor térülnek meg, ha nagy a darabszám és/vagy magas a termékár. Ezt a költséget csökkenti jelentős mértékben a végeselem szimuláció.



1.7. Végeselemes szimulációval segített gyártási modell

A szükséges prototípusok számát csökkenti a végeselemes szimuláció, amennyiben jól modellezhető problémáról van szó, akkor akár el is hagyható a prototípus legyártása. Ekkor már azonnal beindítható a sorozatgyártás, és elégséges a nullszérián próbaüzemet végezni.

A szimuláció nemcsak a szilárdsági vizsgálatok területén ad segítséget, hanem a technológiai tervezéskor is. Léteznek olyan célszoftverek is, amelyekkel egy fröccsöntési, kovácsolási, mélyhúzási, stb. folyamatot tudunk szimulálni, így ezek a magas szerszámköltségű gyártási módszerek is olcsóbbá válnak.

A tervezéskor alkalmazott végeselem-modellezés több területre is kiterjed:

- termék szilárdsági, hőtani, áramlástani, elektromos, mágneses vizsgálata felhasználási körülmények között, amely a termék minőségét javítja, költségét (pl. súlyát) csökkenti;
- termék gyártás közbeni szimulációjára (gyártástechnológia szimulációja), az optimális költségű, de megfelelő termék gyártástervezéséhez,
- szerszámok szimulációja, amely azok élettartamát, optimális üzemi feltételeit adja.

Feladat, mechanikai modell, lehetséges megoldások:

Szerkezet

Anyag,terhelés, alak, megfogás

Alakváltozás (kis, nagy), hőhatás

Redukálás egy vagy kétméretű feladatra

Mechanikai modell előállítása

differenciált egyenletrendszer-egyenlőtlenség

integrált egyenletrendszer-egyenlőtlenség

Pontos

Közelítő

Differencia módszer

Energetikai módszerek

Ritz-féle módszer

Reissner-féle módszer

A végeselem programrendszerek általános felépítése

A végeselem analízis a fizikai szerkezet matematikai modelljét testesíti meg, mely tartalmaz minden olyan jellemzőt (elemek, peremfeltételek, anyagminőségek, stb.), mely a fizikai valóságot modellezi. A végeselem módszer elve a geometria véges elemekre való felosztása (úgynevezett végeselem háló készítése), az elemeket összekötő csomópontokra ható terhelések és ezek által létrejött kimenő mennyiségek közötti összefüggést meghatározó egyenletrendszer megoldása. A végeselem analízis három könnyen szétválasztható modulra bontható, ezek az előkészítés (preprocess), megoldás (process), valamint a kiértékelés (postprocess), melyeket az 1. és 2. táblázat is bemutat. Azonban ezeket a lépéseket a döntési szakasz előzi meg.

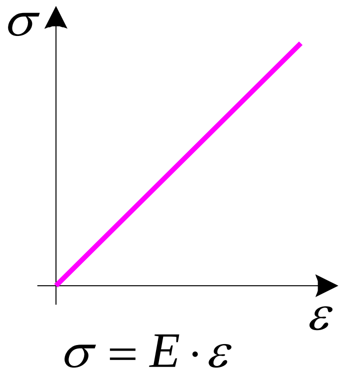
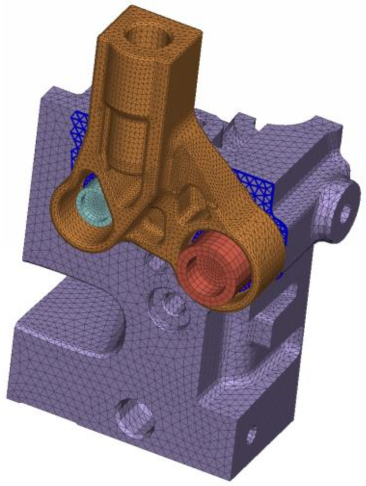
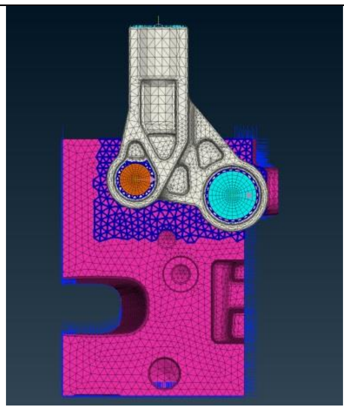
1. **Döntési szakasz**: itt szükséges megállapítani a probléma típusát, majd ennek megfelelően kijelölni a megoldáshoz használni kívánt módszert, ami az alább lépéseket tartalmazza:
   - az adott fizikai probléma típusa (mechanikai, hőtani, stb.),
   - az elemzés fajtája (statikai, dinamikai, stb.),
   - lineáris vagy nemlineáris közelítéssel kívánjuk vizsgálni a valóságot,

- az alkalmazni kívánt modell típusának megválasztása (3D-s testmodell, héj, rúd, stb.),
- szimmetria követelmények teljesülése (fél, negyed modell, tengelyszimmetria, ciklikusság, stb.),
- alkalmazott elemtípusok kiválasztása (háromszög, négyszög, stb.),
- átlagos elem-élhossz (hálósűrűség), valamint helyenkénti hálósűrítés (részletesség) meghatározása,
- peremfeltételek helyes megadása (bizonyos alkatrészek kényszerekkel való helyettesítése).

2. **Előkészítés:** a végeselem modell szimulációra való előkészítése, amely az következő lépésekből áll:
   - Anyagi tulajdonságok (anyagjellemzők) definiálása, ahol meg kell adni a szerkezet vagy a szerkezet egyes részeinek (vonal, felület, vagy akár véges elem) anyagait, anyagjellemzőit.
   - Geometria létrehozása (ez történhet a szoftver által nyújtott eszközökkel, vagy importálható CAD-fájlokból) pontok, vonalak, felületek, térfogatok segítségével.
   - Végeselem háló generálása (elemtípusok, elemméretek, elemkritériumok megadása), az alábbi szempontok figyelembevételével:
     - a hálót sűríteni kell azokon a tartományokon, ahol jelentősebb változás várható a mechanikai mennyiségeket tekintve (például feszültség),
     - a koncentrált erők vagy nyomatékok támadáspontjára legyen csomópont felvéve,
     - a megtámasztási helyekre is kell csomópontnak esnie.
   - Peremfeltételek és terhelések (megfogások, megtámasztások, alkatrészkapcsolatok, kényszerek, erők, koncentrált vagy megoszló erők, nyomatékok) megadása.

1. táblázat: Végeselem szimuláció előkészítése

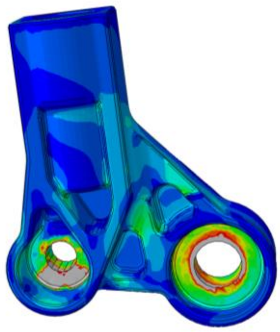
Geometria modellezése	

Anyagjellemzők megadása	
Végeselem felosztás generálása	
Kinematikai és dinamikai peremfeltételek definiálása	

3. Megoldás: a végeselem-számítási rész, ahol a következő műveleteket kell elvégezni:

- a merevségi mátrixok és terhelésvektorok előállítását (először az egyes elemekre, majd az egész szerkezetre),
- csomóponti terhelések és kinematikai peremfeltételek figyelembe vételét,
- a szerkezet lineáris algebrai egyenletrendszerének megoldását, amelynek segítségével meghatározásra kerülnek a szerkezet csomóponti elmozdulásai.

2. táblázat: Végeselem szimuláció és kiértékelése

Megoldás	Merevségi mátrixok, terhelésvektorok előállítása, egyenletrendszer megoldása, elmozdulásmező számítása
Kiértékelés: eredmények megjelenítése, elmozdulások, reakcióerők, alakváltozások, feszültségek	

4. **Kiértékelés**: a felhasználó eldönti, hogy a szerkezet szilárdságtani állapotai közül mit vizsgál részletesen és mit szemléltet. Így lehetőség van például:
    - a szerkezet pontjainak elmozdulását (deformált alak) megtekinteni vagy a
    - feszültségeket (az egyes feszültség-koordinátákat külön-külön, vagy a redukált feszültségeket) kiértékelni.

A mai fejlett végeselem programok rengeteg segítséget nyújtanak a munka ezen szakaszában (például maximális feszültség helyének, értékének kijelzése, alakváltozás animációként való megjelenítése):

- az eredmény modellen való szemléltetésében (például különböző színek segítségével),
- deformációk, alakváltozások megjelenítésében, animációként való ábrázolásában,
- maximum és minimum értékek, valamint ezek helyének bemutatásában.

Végeselem módszer: numerikus eljárás mérnöki, fizikai feladatok közelítő megoldására.
Az eljárás alapgondolata:

- **A keresett (ismeretlen) mezőket résztartományonként közelítjük. Az egész tartományra (testre, alkatrészre) érvényes mezőt résztartományokra felvett mezők összekapcsolásával állítjuk elő.**
- **A kitűzött rugalmasságtani feladat megoldását valamilyen energiaelv alkalmazásával állítjuk elő.** Leginkább a Lagrange-féle variációs elv alkalmazása elterjedt, ahol az elmozdulás mező az elsődleges ismeretlen.

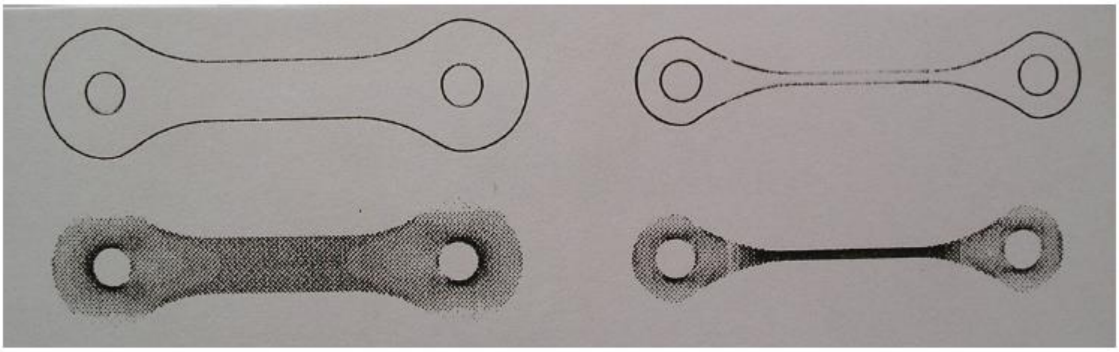
  Az elmozdulás mezőn alapuló végeselem módszer felépítése:
    - A testet (alkatrészt) tetszőleges alakú, véges számú résztartományra, ún. **véges elemre** bontjuk.
    - Az elmozdulás mezőt elemenként külön-külön közelítjük. A közelítő függvények általában polinomok. Ezt lokális közelítésnek nevezzük.
    - Az elemeken nevezetes, kitüntetett pontokat**, ún. csomópontokat** veszünk fel. Az elemenként felvett közelítő függvényeket a csomóponti (elmozdulás) paraméterek segítségével összeillesztjük.
    - A Lagrange-féle variációs elv alkalmazásával a csomóponti paraméterekre lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk,

- A lineáris algebrai egyenletrendszerből meghatározzuk a csomóponti (elmozdulás) paramétereket.
- A csomóponti paraméterek ismeretében a test (alkatrész) bármely pontjában meghatározhatók a szilárdságtani (elmozdulási, alakváltozási, feszültségi) állapotok.

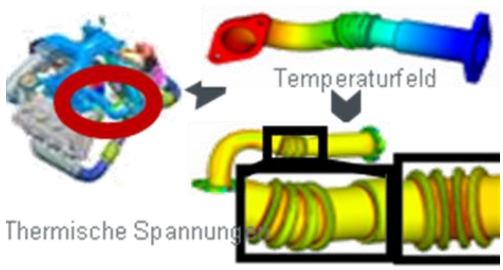
Számtalan mérnöki feladat megoldására alkalmas:

- Szilárdságtani analízis,

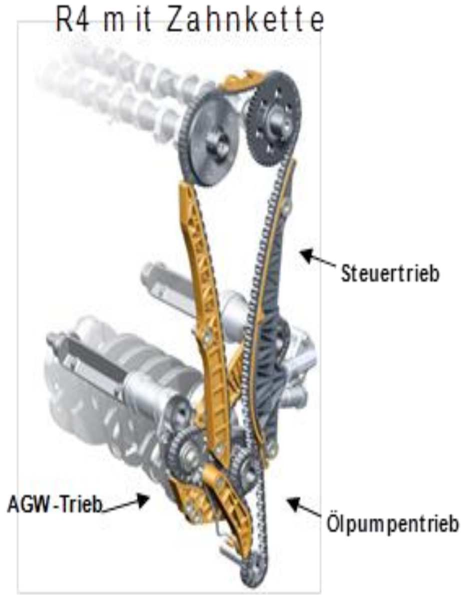
- Sajátfrekvencia vizsgálat,
- Optimalizálási feladatok,



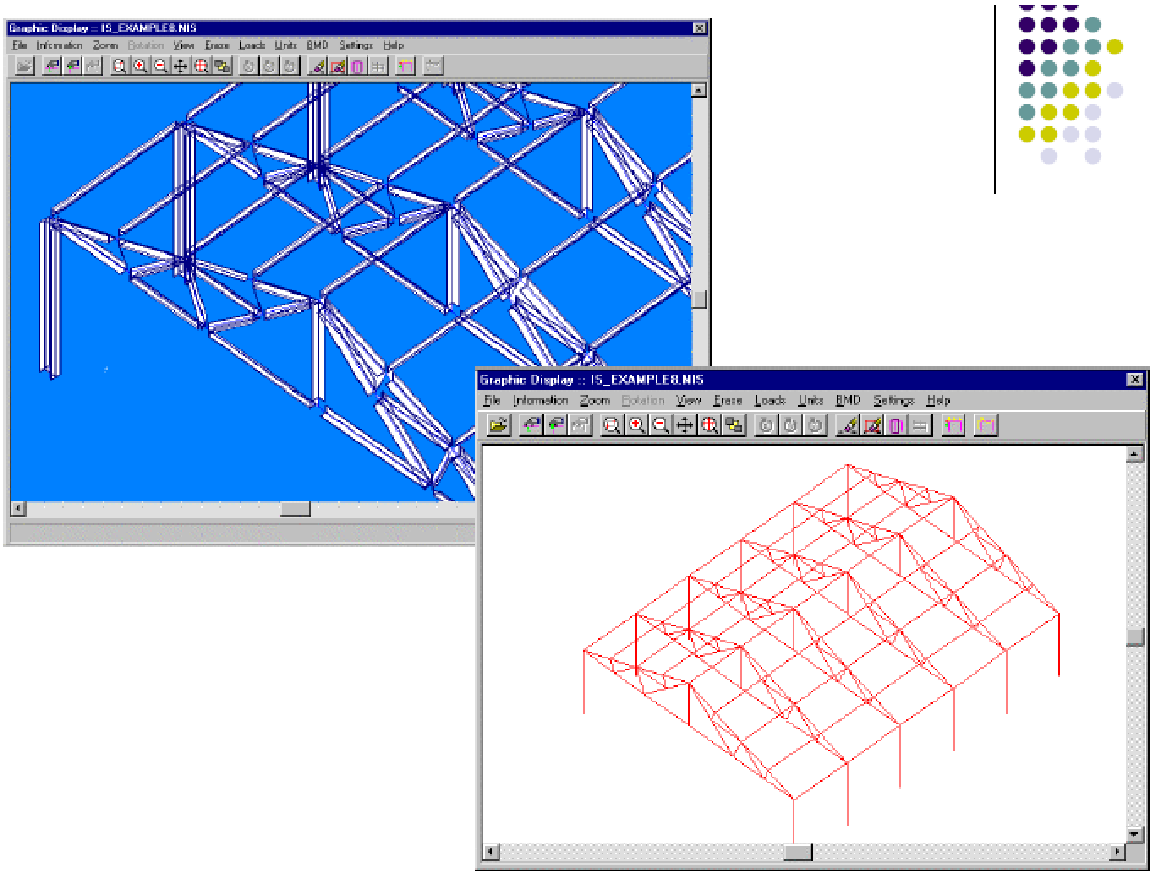
- Olajkörök 1D-s áramlástani eljárással való vizsgálata,
- Termomechanikai feladatok megoldására: V6 3.0I TDI turbofeltöltő



- Mechanizmusok (pl. vezérmű lánchajtás) többtestű rendszerként történő modellezése



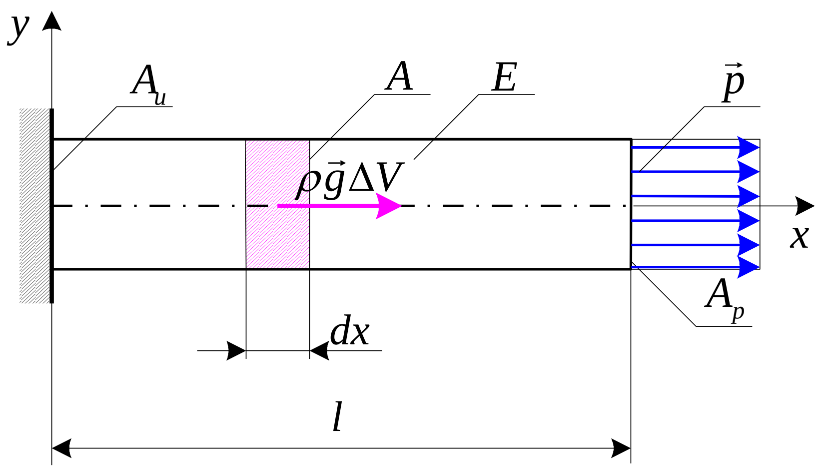
- Építőipari feladatok



2. Egydimenziós, rugalmas, peremérték feladat:

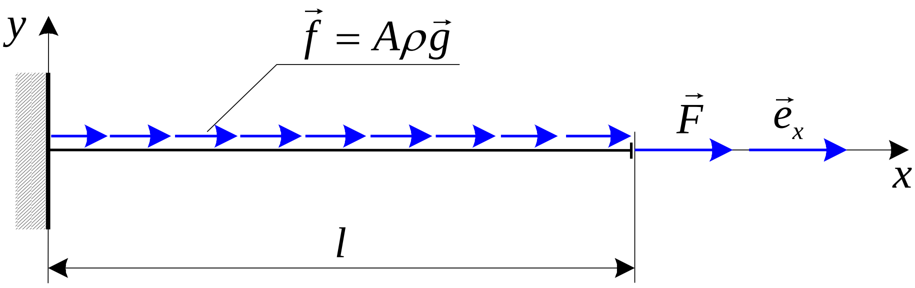
- ❖ Egydimenziós: egy darab változó (függvény) meghatározása a cél, azaz 1 darab koordinátától való függést jelent. Jelen esetben húzott-nyomott rúd egyensúlyi egyenletének származtatása a feladat (rácsos tartóban csak ilyenek vannak).
- ❖ Rugalmas: a test visszanyeri állapotát, a terhelés megszűntetése után.
- ❖ Peremérték feladat: differenciál-egyenlet megoldását jelenti, adott peremfeltételek mellett.

Adott: l hosszúságú, A keresztmetszetű, homogén, prizmatikus rúd. A rúd anyaga homogén, izotróp és lineárisan rugalmas, rugalmassági modulusa E.



1. ábra: Húzott-nyomott prizmatikus rúdfeladat

Prizmatikus rúd: minden keresztmetszete egyforma.
A rúd rúdirányú önsúlyával és a véglapján megoszló erővel terhelt.
A rúd térfogatán egyenletesen megoszló önsúly sűrűségvektora: $\rho\vec{g}$.
A rúd jobboldali véglapján megoszló, rúdirányú erőrendszer sűrűségvektora: $\vec{p} = p_x\vec{e}_x$
További jelölések:
A_u - befogásnál elhelyezkedő keresztmetszet, kinematikai perem,
A_p - terhelésnél elhelyezkedő keresztmetszet, dinamikai perem,
Rúd középvonala: rúd S ponti szála, a keresztmetszetek S pontjai által alkotott vonal. A középvonal a rúd mechanikai modellje.
$\vec{u}$ - elmozdulás vektor, jelen esetben x függvénye ($\vec{u}(x)$ függvényt kell meghatározni),
$\vec{p}$ - felületen megoszló terhelés.



2. ábra: Húzott-nyomott prizmatikus rúdfeladat egy dimenziós modellje

Terhelések redukálása a rúd középvonalába:

- Térfogaton megoszló terhelés: $\rho\vec{g}\Delta V = \rho\vec{g}A\Delta x = \rho\vec{g}A\Delta x \quad / : \Delta x$
- Vonal mentén megoszló terhelés: $\dfrac{\rho\vec{g}\Delta V}{\Delta x} = \dfrac{\rho\vec{g}A\Delta x}{\Delta x} = \rho g A\vec{e}_x = \vec{f}\left[\dfrac{kg}{s^2} = \dfrac{N}{m}\right]$
- Véglapot terhelő megoszló erő eredője $\vec{F} = p_x A_p \vec{e}_x = p_x A\vec{e}_x = F_x\vec{e}_x\,[N]$

$$\vec{F}_x$$

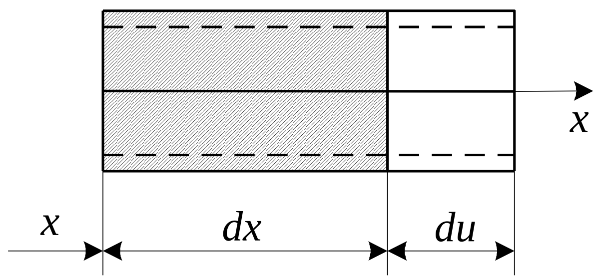
Azaz összefoglalva, ismert a rúd terhelése, geometriai adatai, anyagállandói, terhelése. 3 db egyenletet kell felírni a rúd elmozdulásának megállapításához, amelyek a következő fejezetben kerülnek tárgyalásra.

2.1. A rúd rugalmas peremérték feladatának egyenletei

A húzott-nyomott prizmatikus rúd rugalmas peremérték feladatának egyenleteit a statikában és szilárdságtanban tanult ismeretek alapján állítjuk elő.

Az adott feladat esetén keressük az x irányú, $u(x)$ elmozdulást, mint a hely függvényét. Az elmozdulás függvény a rúd összes pontjának elmozdulását magában foglalja, ezért szokás elmozdulás mezőnek is nevezni.

Kinematikai vagy geometriai egyenlet:



3. ábra: Elemi hosszúságú rúdelem hosszváltozása

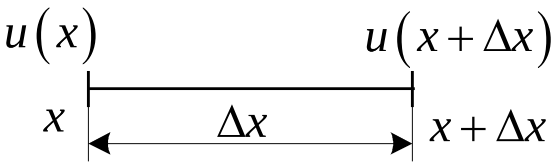
A rúd egy elemi hosszúságú szakaszát, dx-t vizsgáljuk. x-szel jelölt távolságra helyezkedik el az origótól.

$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx}$ **Kapcsolatot teremt az elmozdulások és alakváltozások között.**

Az alakváltozás azt fejezi ki, hogy az eredeti hosszhoz képest mennyivel változik a rúd hossza (arányszámot jelent).

$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$, ahol tulajdonképpen a du-k összessége megadja Δl-t.

(Kinematikai egyenlet származtatása:



4. ábra: Elemi rúdszakasz elmozdulása

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l'-l}{l},$$

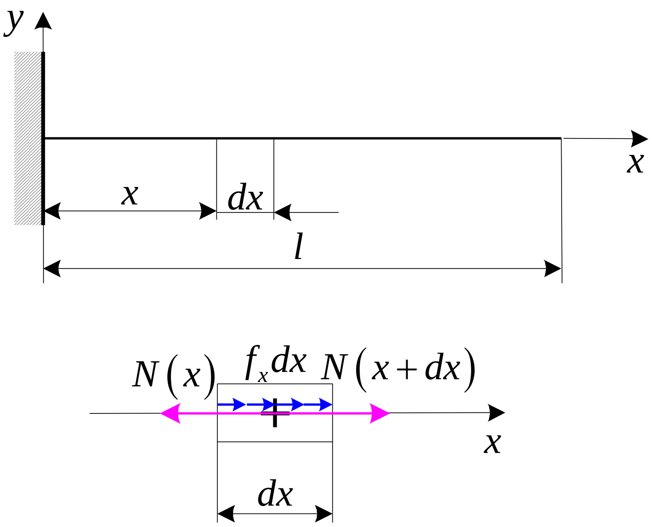
ahol

$$\left.\begin{aligned} l &= (x+\Delta x) - x = \Delta x \\ l' &= \left[(x+\Delta x) + u(x+\Delta x)\right] - \left[x + u(x)\right] \end{aligned}\right\} \text{ x hely } u(x)\text{-t elmozdul}$$

$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l'-l}{l}$ egyenletbe behelyettesítve, és határértékét véve:

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x+\Delta x) + u(x+\Delta x)\right] - \left[x + u(x)\right] - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du(x)}{dx} \text{)}$$

Egyensúlyi egyenlet: a rúd egyensúlyban van, ha $\vec{F} = \vec{0}$.



5. ábra: Az elemi hosszúságú rúdelem egyensúlya

dx hosszúságú elemi rúdszakaszt vizsgáljuk, ami az origótól legyen x távolságra. A rúdon belül a két levágott rúdszakaszt belső erők helyettesítik. Mindkét rúderő pozitív, azaz húzásról beszélünk, középen hat $f_x dx$.

Ha tehát a rúd egyensúlyban van, az erők összegének nullának kell lennie.

Azaz:

$$-N(x)+f_x\Delta x+N(x+\Delta x)=0 \qquad /-f_x\Delta x\ \ /:\Delta x$$

$$\frac{N(x+\Delta x)-N(x)}{\Delta x}=-f_x \qquad /\lim_{\Delta x\to 0}$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{N(x+\Delta x)-N(x)}{\Delta x}=\dfrac{dN}{dx}=\dfrac{dN(x)}{dx}=-f_x$ **Húzott-nyomott rúd egyensúlyi egyenlete, ami kapcsolatot teremt a terhelések és belső erők között, ahol a kapcsolat egy derivált.**

1. Megjegyzés:

Az f függvény deriváltján az

$$f'(x):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

határértéket értjük (feltételezve, hogy létezik és véges).

2. Megjegyzés:

$$\underbrace{\frac{dM_{hz}}{dx}=-T_y}_{\text{Nyomatéki egyenlet differenciális alakja.}} \qquad , \qquad \underbrace{\frac{dT_y}{dx}=f_y}_{\text{Rúdra merőleges terhelés.}} \qquad .$$

Anyagegyenlet: Hooke-törvény: lineárisan rugalmas anyagról van szó.

$\sigma_x=E\cdot\varepsilon_x$ (egydimenziós eset),

ahol

$\sigma_x=\dfrac{N}{A}\ (N=\sigma_x\cdot A)$ - normál feszültség,

E - rugalmassági modulus,

ε_x - fajlagos nyúlás.

$$\sigma_x=E\cdot\varepsilon_x \qquad /\cdot A$$

$\sigma_x\cdot A=N=A\cdot E\cdot\varepsilon_x$ **anyag egyenlet: kapcsolatot teremt a belső erők és az alakváltozás között.**

Kinematikai peremfeltétel: az elmozdulásra vonatkozó feltételt jelenti. (Ez ebben az esetben a befogásra vonatkozik, ahol a rúd vízszintesen biztos, hogy nem tud elmozdulni). Az 1. ábrán látható A_u felületnél adott az elmozdulás értéke:

$u(x=0)=u(0)=0$.

Dinamikai peremfeltétel: a terhelésekre vonatkozó feltételt jelenti. Jelen esetben csak a test felületére, peremére vonatkozó terheléseket vesszük figyelembe. A 2. ábrán látható A_p felületnél adott a terhelés értéke:

$N(x=l)=F_x$.(Amennyiben a rúderő befelé mutat, negatív előjelet kell kitenni, mert nyomásról van szó).

A rugalmas peremérték feladatban tehát az $u(x)$ elmozdulás, ε_x fajlagos nyúlás, $,N$ rúderő három ismeretlen függvény fordul elő.

Összefoglalva: a rugalmas peremérték feladat megoldásához pedig rendelkezésünkre áll a **rugalmasságtan egyenlet-rendszere** húzott-nyomott rúdra, valamint a kinematikai és dinamikai peremfeltétel.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Kinematikai egyenlet}: \varepsilon_x(x)=\dfrac{du(x)}{dx} \\ \text{Egyensúlyi egyenlet}: \dfrac{dN(x)}{dx}=-f_x \\ \text{Anyag egyenlet}: N=A\cdot E\cdot\varepsilon_x \end{array}\right\} \text{3 db skalár egyenlet, 3 db skalár függvényt jelent}$$

Tehát ezen **3 egyenlettel és a két peremfeltétellel** adott peremérték feladat analitikus megoldását szokás **tényleges megoldásnak vagy egzakt megoldásnak** nevezni.

2.2. A rúd rugalmas peremérték feladatának analitikus megoldása:

A kinematikai egyenletet ($\varepsilon_x(x)=\dfrac{du(x)}{dx}$) behelyettesítjük az anyag egyenletbe:

$$N(x)=A\cdot E\cdot\varepsilon_x(x)$$

$N(x)=A\cdot E\cdot\dfrac{du(x)}{dx}$ Ezen kifejezést pedig az egyensúlyi egyenletbe $\left(\dfrac{dN(x)}{dx}=-f_x\right)$ helyettesítjük:

$$\frac{d}{dx}\left(A\cdot E\cdot\frac{du(x)}{dx}\right)=-f_x$$

$A\cdot E\cdot\dfrac{d^2u(x)}{dx^2}=-f_x$ A rúd homogén, prizmatikus, így az AE szorzat kiemelhető a zárójel elé, így a feladathoz megkapjuk az elmozdulásra vonatkozó alapegyenletet. Valamint A és E konstansok, így oszthatunk velük.

$$A\cdot E\cdot\frac{d^2u(x)}{dx^2}=-f_x\qquad /:(A\cdot E)$$

$\dfrac{d^2u(x)}{dx^2}=\dfrac{-f_x}{A\cdot E}$ Másodrendű differenciál egyenlet, amit kétszer kell integrálnunk. (Konstans integrálja: konstans-szor x+konstans, ahol f_x konstans megoszló terhelés.)

$$\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{f_x}{A\cdot E}\qquad /\int dx$$

$$\frac{du(x)}{dx}=-\frac{f_x}{A\cdot E}x+C_1\qquad /\int dx$$

$u(x)=-\dfrac{f_x}{2A\cdot E}x^2+C_1x+C_2$, ahol a konstansok meghatározása a peremfeltételek, mindig az adott feladatra vonatkozó peremfeltételek meghatározásával történik.

Tehát a peremfeltételek ($N(x=l)=F_x$, $u(x=0)=u(0)=0$) felhasználásával a következőket kapjuk:

a dinamikai peremfeltétel szolgáltatja az első konstanst:

$N(x)=A\cdot E\cdot\dfrac{du(l)}{dx}=A\cdot E\cdot\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=l}$, ahol

$\dfrac{du(x)}{dx}=-\dfrac{f_x}{A\cdot E}x+C_1$, így az egyenlet: $N(x)=A\cdot E\cdot\dfrac{du(l)}{dx}=AE\left.\left(-\dfrac{f_x}{A\cdot E}x+C_1\right)\right|_{x=l}=F_x$

$$=A\cdot E\left.\left(-\frac{f_x}{A\cdot E}x+C_1\right)\right|_{x=l}=F_x$$

$$=-f(x)l+AEC_1=F_x\qquad\Rightarrow\qquad C_1=\frac{F_x+f(x)l}{AE}.$$

Valamint a kinematikai peremfeltétel segítségével kapjuk a második konstanst:

$$u(x) = -\frac{f_x}{2A \cdot E} x^2 + C_1 x + C_2$$

Azaz a peremfeltétel figyelembevételével:

$$u(0) = 0 = -\frac{f_x}{2A \cdot E} 0^2 + C_1 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Ezek után az analitikus vagy tényleges megoldás zárt alakban írható fel:

$$u(x) = -\frac{f_x}{2A \cdot E} x^2 + C_1 x + C_2 \text{ (behelyettesítve)}$$

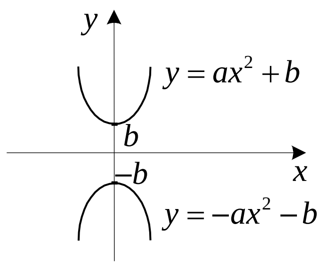
$$u(x) = -\frac{f_x}{2A \cdot E} x^2 + \left(\frac{F_x + f(x) l}{AE} \right) x + 0 \,,$$

valamint:

$$N(x) = A \cdot E \cdot \frac{du(l)}{dx} = AE \left(-\frac{f_x}{A \cdot E} x + C_1 \right) \text{(behelyettesítve)}$$

$$N(x) = A \cdot E \cdot \frac{du(l)}{dx} = AE \left(-\frac{f_x}{A \cdot E} x + \frac{F_x + f_x l}{AE} \right) = -f_x \cdot x + F_x + f_x \cdot l$$

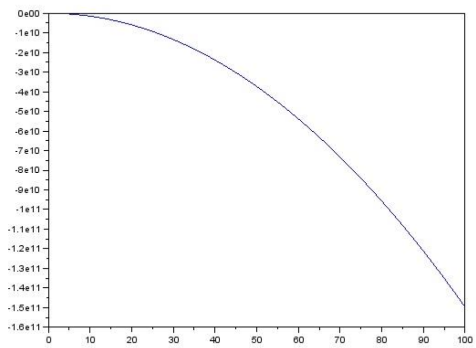
Az analitikus megoldás ábrázolása:



6. ábra: Parabola ábrázolása

$u(x) = -\frac{f_x}{2A \cdot E} x^2 + \left(\frac{F_x + f(x) l}{AE} \right) x + 0$ ábrázolása (nevezetes pontoknál történő behelyettesítéssel):

$$\left.\begin{aligned} & u(x=0) = 0 \\ & u(x=l) = -\frac{f_x}{2A \cdot E} l^2 + \left(\frac{F_x + f(x) l}{AE} \right) l + 0 \end{aligned}\right\}$$

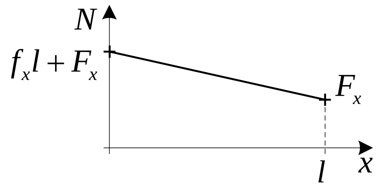


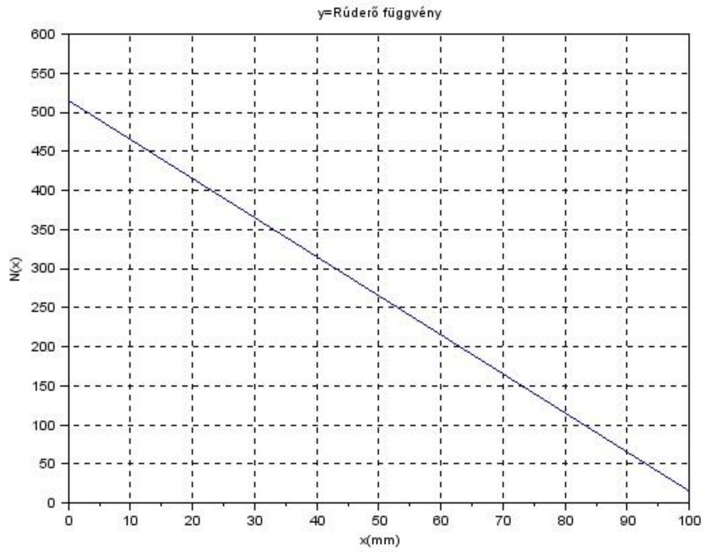
1. táblázat: Elmozdulás függvény ábrázolása

$N(x) = A \cdot E \cdot \frac{du(l)}{dx} = AE \left(-\frac{f_x}{A \cdot E} x + \frac{F_x + f_x l}{AE} \right) = -f_x \cdot x + F_x + f_x \cdot l$ ábrázolása (nevezetes pontoknál történő behelyettesítéssel):

Megjegyzés: $y = \underbrace{a}_{\text{meredekség}} x + \underbrace{b}_{\text{y tengellyel vett metszéspont}}$ Egyenes egyenlete.

$$\left.\begin{aligned} N(x=0) &= F_x + f_x \cdot l \\ N(x=l) &= F_x \end{aligned}\right\}$$

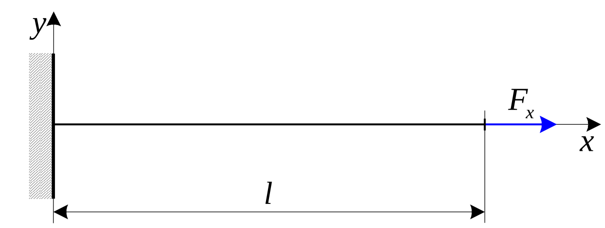
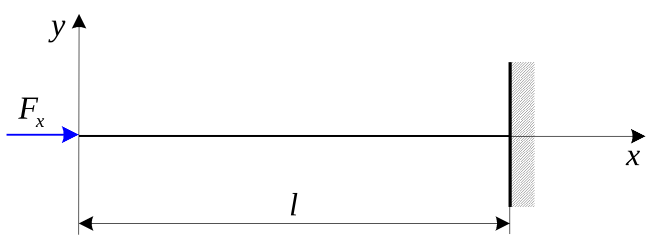


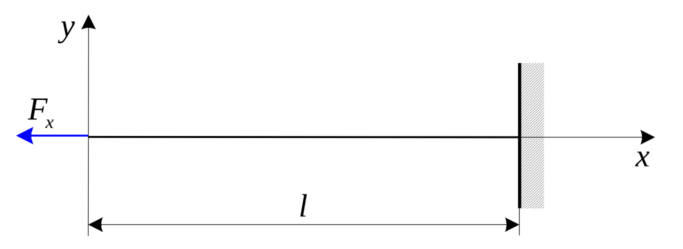
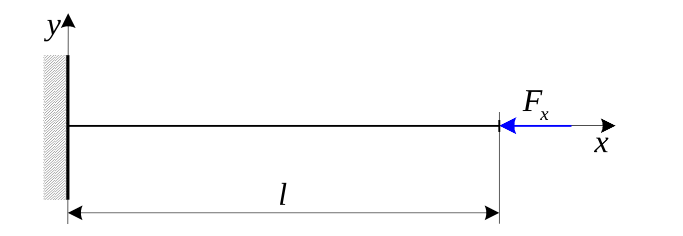
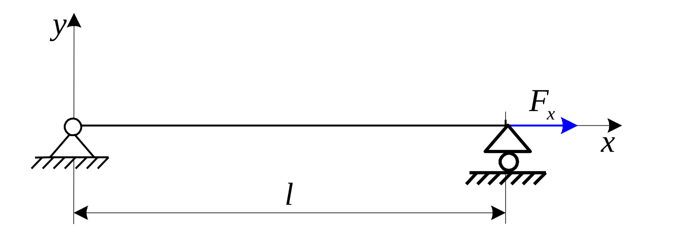
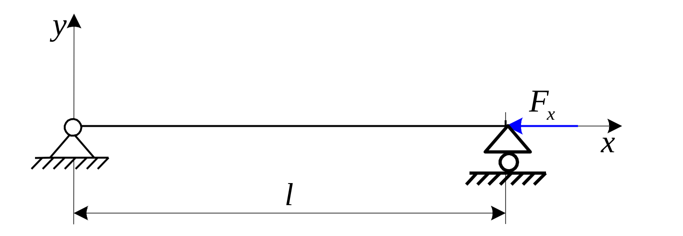
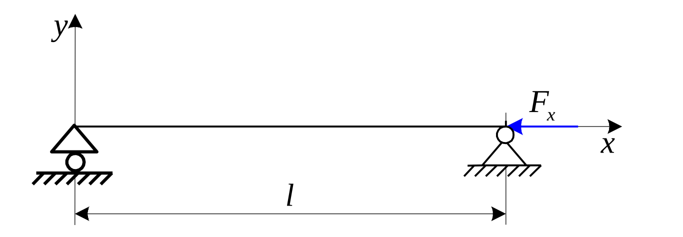
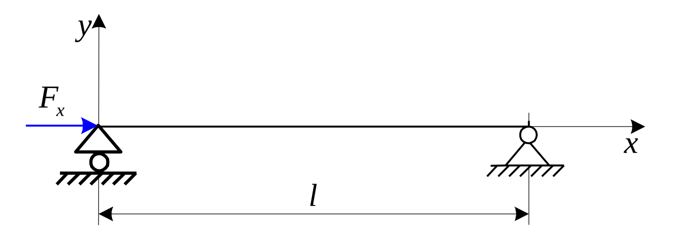


2. táblázat: Rúderő függvény ábrázolása

Egy mechanikai peremérték feladat megoldása többnyire csak egyszerű esetekben ismert, mint a fent vázolt feladat is mutatja. Összetett térbeli feladat esetén az analitikus megoldását nem tudjuk előállítani, csak közelítő megoldással tudunk szolgálni. A továbbiakban ezen egyszerű egydimenziós feladat közelítő megoldásának bemutatására kerül sor.

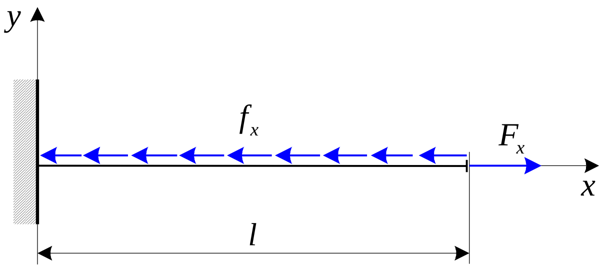
2.2.1. Példák kinematikai és dinamikai peremfeltételek megadására:

	Kinematikai peremfeltétel: $u(0)=0$ Dinamikai peremfeltétel: $N(l)=F_x$
	Kinematikai peremfeltétel: $u(l)=0$ Dinamikai peremfeltétel: $N(0)=-F_x$

	Kinematikai peremfeltétel: $u(l)=0$ Dinamikai peremfeltétel: $N(0)=F_x$
	Kinematikai peremfeltétel: $u(0)=0$ Dinamikai peremfeltétel: $N(l)=-F_x$
	Kinematikai peremfeltétel: $u(0)=0$ Dinamikai peremfeltétel: $N(l)=F_x$
	Kinematikai peremfeltétel: $u(0)=0$ Dinamikai peremfeltétel: $N(l)=-F_x$
	Kinematikai peremfeltétel: $u(l)=0$ Dinamikai peremfeltétel: $N(l)=-F_x$
	Kinematikai peremfeltétel: $u(l)=0$ Dinamikai peremfeltétel: $N(0)=-F_x$

2.2.2. Példák perem érték feladat megoldására:

1. példa:

	Kinematikai peremfeltétel: $u(0)=0$ Dinamikai peremfeltétel: $N(l)=F_x$ Kinematikai egyenlet: $\varepsilon_x(x)=\dfrac{du(x)}{dx}$ Egyensúlyi egyenlet: $\dfrac{dN(x)}{dx}=(+)f_x$ Anyag egyenlet: $N=A\cdot E\cdot\varepsilon_x$

Megoldás:

A kinematikai egyenletet ($\varepsilon_x(x)=\dfrac{du(x)}{dx}$) behelyettesítjük az anyag egyenletbe:

$$N(x)=A\cdot E\cdot\varepsilon_x(x)$$

$N(x)=A\cdot E\cdot\dfrac{du(x)}{dx}$ Ezen kifejezést pedig az egyensúlyi egyenletbe $\left(\dfrac{dN(x)}{dx}=+f_x\right)$ helyettesítjük:

$$\frac{d}{dx}\left(A\cdot E\cdot\frac{du(x)}{dx}\right)=f_x$$

$A\cdot E\cdot\dfrac{d^2u(x)}{dx^2}=f_x$ A rúd homogén, prizmatikus, így az AE szorzat kiemelhető a zárójel elé, így a feladathoz megkapjuk az elmozdulásra vonatkozó alapegyenletet. Valamint A és E konstansok, így oszthatunk velük.

$$A\cdot E\cdot\frac{d^2u(x)}{dx^2}=f_x \qquad /:(A\cdot E)$$

$\dfrac{d^2u(x)}{dx^2}=\dfrac{f_x}{A\cdot E}$ Másodrendű differenciál egyenlet, amit kétszer kell integrálnunk. (Konstans integrálja: konstans-szor x+konstans, ahol f_x konstans megoszló terhelés.)

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{f_x}{A\cdot E} \qquad /\int dx$$

$$\frac{du(x)}{dx}=\frac{f_x}{A\cdot E}x+C_1 \qquad /\int dx$$

$u(x)=\dfrac{f_x}{2A\cdot E}x^2+C_1x+C_2$, ahol a konstansok meghatározása a peremfeltételek, mindig az adott feladatra vonatkozó peremfeltételek meghatározásával történik.

Tehát a peremfeltételek ($N(l)=F_x, u(0)=0$) felhasználásával a következőket kapjuk:

a dinamikai peremfeltétel szolgáltatja az első konstanst:

$$N(x) = A \cdot E \cdot \frac{du(x)}{dx} = A \cdot E \cdot \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=l}$$, ahol

$\frac{du(x)}{dx} = \frac{f_x}{A \cdot E} x + C_1$, így az egyenlet: $N(x=l) = A \cdot E \cdot \frac{du(l)}{dx} = AE\left.\left(\frac{f_x}{A \cdot E} x + C_1\right)\right|_{x=l} = F_x$

$$= A \cdot E\left.\left(\frac{f_x}{A \cdot E} x + C_1\right)\right|_{x=l} = F_x$$

$$= f_x l + AEC_1 = F_x \qquad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{F_x - f_x l}{AE}.$$

Valamint a kinematikai peremfeltétel segítségével kapjuk a második konstanst:

$$u(x) = \frac{f_x}{2A \cdot E} x^2 + C_1 x + C_2$$

Azaz a peremfeltétel figyelembevételével:

$$u(0) = 0 = \frac{f_x}{2A \cdot E} 0^2 + C_1 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Ezek után az analitikus vagy tényleges megoldás zárt alakban írható fel:

$$u(x) = \frac{f_x}{2A \cdot E} x^2 + C_1 x + C_2 \text{ (behelyettesítve)}$$

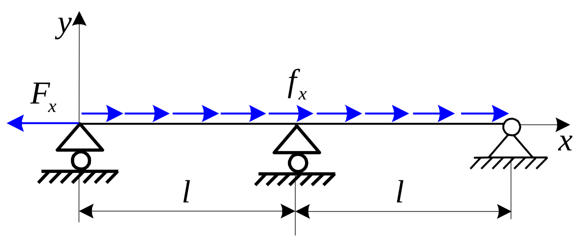
$$u(x) = \frac{f_x}{2A \cdot E} x^2 + \left(\frac{F_x - f(x) l}{AE}\right) x + 0,$$

valamint:

$$N(x) = A \cdot E \cdot \frac{du(l)}{dx} = AE\left(\frac{f_x}{A \cdot E} x + C_1\right) \text{(behelyettesítve)}$$

$$N(x) = A \cdot E \cdot \frac{du(l)}{dx} = AE\left(\frac{f_x}{AE} x + \frac{F_x - f_x l}{AE}\right) = f_x \cdot x + F_x - f_x \cdot l$$

2. példa:



Kinematikai peremfeltétel: $u(2l) = 0$

Dinamikai peremfeltétel: $N(0) = F_x$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Kinematikai egyenlet}: \varepsilon_x(x) = \dfrac{du(x)}{dx} \\ \text{Egyensúlyi egyenlet}: \dfrac{dN(x)}{dx} = (-) f_x \\ \text{Anyag egyenlet}: N = A \cdot E \cdot \varepsilon_x \end{array}\right\}$$

Megoldás:

A kinematikai egyenletet ($\varepsilon_x(x) = \frac{du(x)}{dx}$) behelyettesítjük az anyag egyenletbe:

$$N(x) = A \cdot E \cdot \varepsilon_x(x)$$

$N(x) = A \cdot E \cdot \frac{du(x)}{dx}$ Ezen kifejezést pedig az egyensúlyi egyenletbe $\left(\frac{dN(x)}{dx} = -f_x\right)$ helyettesítjük:

$$\frac{d}{dx}\left(A \cdot E \cdot \frac{du(x)}{dx}\right) = -f_x$$

$A \cdot E \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} = -f_x$ A rúd homogén, prizmatikus, így az AE szorzat kiemelhető a zárójel elé, így a feladathoz megkapjuk az elmozdulásra vonatkozó alapegyenletet. Valamint A és E konstansok, így oszthatunk velük.

$$A \cdot E \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} = -f_x \qquad / : (A \cdot E)$$

$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{f_x}{A \cdot E}$ Másodrendű differenciál egyenlet, amit kétszer kell integrálnunk. (Konstans integrálja: konstans-szor x+konstans, ahol f_x konstans megoszló terhelés.)

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{f_x}{A \cdot E} \qquad / \int dx$$

$$\frac{du(x)}{dx} = -\frac{f_x}{A \cdot E}x + C_1 \qquad / \int dx$$

$u(x) = -\frac{f_x}{2A \cdot E}x^2 + C_1x + C_2$, ahol a konstansok meghatározása a peremfeltételek, mindig az adott feladatra vonatkozó peremfeltételek meghatározásával történik.

Tehát a peremfeltételek ($N(0) = F_x$, $u(2l) = 0$) felhasználásával a következőket kapjuk:

a dinamikai peremfeltétel szolgáltatja az első konstanst:

$N(x) = A \cdot E \cdot \frac{du(x)}{dx} = A \cdot E \cdot \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}$, ahol

$\frac{du(x)}{dx} = -\frac{f_x}{A \cdot E}x + C_1$, így az egyenlet:

$$N(x=0) = A \cdot E \cdot \frac{du(x)}{dx} = AE\left.\left(-\frac{f_x}{A \cdot E}x + C_1\right)\right|_{x=0} = F_x$$

$$= A \cdot E\left.\left(-\frac{f_x}{A \cdot E}x + C_1\right)\right|_{x=0} = F_x$$

$$= -f_x x + AEC_1 = F_x \qquad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{F_x}{AE}.$$

Valamint a kinematikai peremfeltétel segítségével kapjuk a második konstanst:

$$u(x) = \frac{f_x}{2A \cdot E}x^2 + C_1x + C_2$$

Azaz a peremfeltétel figyelembevételével:

$$u(2l) = 0 = -\frac{f_x}{2AE}4l^2 + \frac{F_x}{AE}2l + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{f_x}{AE}2l^2 - \frac{F_x}{AE}2l$$

Ezek után az analitikus vagy tényleges megoldás zárt alakban írható fel:

$$u(x) = -\frac{f_x}{2A\cdot E}x^2 + C_1 x + C_2 \text{ (behelyettesítve)}$$

$$u(x) = -\frac{f_x}{2A\cdot E}x^2 + \frac{F_x}{AE}x + \frac{f_x}{AE}2l^2 - \frac{F_x}{AE}2l,$$

valamint:

$$N(x) = A\cdot E\cdot\frac{du}{dx} = AE\left(-\frac{f_x}{A\cdot E}x + C_1\right)\text{(behelyettesítve)}$$

$$N(x) = A\cdot E\cdot\frac{du}{dx} = AE\left(-\frac{f_x}{A\cdot E}x + C_1\right) = AE\left(-\frac{f_x}{A\cdot E}x + \frac{F_x}{AE}\right) = F_x - f_x x$$